Correction des exercices :
p65 nº14, 15, 16
p66 nº28, 30
p68 nº44,46
p69 nº61 et 62
p74 nº102, 103
p75 nº107

14 **1.** $f(x) = -0,3x^2 + 1,6x + 2$, f est une fonction polynôme de degré 2 de coefficients $a = -0,3$, $b = 1,6$ et $c = 2$.

Son écriture canonique est $-0,3(x-\alpha)^2 + \beta$

avec : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-1,6}{2\times(-0,3)} = \dfrac{8}{3}$

et $\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{8}{3}\right) = -0,3\left(\dfrac{8}{3}\right)^2 + 1,6\times\dfrac{8}{3} + 2$

$= -\dfrac{32}{15} + \dfrac{64}{15} + 2 = \dfrac{62}{15}$.

Donc, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = -0,3\left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 + \dfrac{62}{15}$.

2. La forme canonique de $f(x)$ indique que f admet un maximum ($a < 0$), égal à $\dfrac{62}{15}$ atteint en $\dfrac{8}{3}$. La hauteur maximale atteinte par le ballon est de $\dfrac{62}{15}$ m soit environ 4,1 m.

3. $f(4,6) = -0,3\times 4,6^2 + 1,6\times 4,6 + 2 = 3,012$. La hauteur du panier est de 3,012 m.

15 La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (–5 ; 0) et (4 ; 0). La forme factorisée de la fonction f dont $\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique est, $f(x) = a(x+5)(x-4)$.
De plus, la courbe passe par le point de coordonnées (0 ; 7), on a donc $f(0) = 7$.

Or $f(0) = 7 \Leftrightarrow a(0+5)(0-4) = 7 \Leftrightarrow -20a = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{20}$.

La forme factorisée de la fonction f est

$$f(x) = -\frac{7}{20}(x+5)(x-4).$$

La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (2 ; 0). La forme factorisée de la fonction g dont $\mathscr{C}_2$ est la représentation graphique est, $g(x) = a(x-2)^2$.
De plus, la courbe passe par le point de coordonnées (0 ; 4), on a donc, $g(0) = 4$.
Or $g(0) = 4 \Leftrightarrow a(0-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$.
La forme factorisée de la fonction g est $g(x) = (x-2)^2$.
La courbe $\mathscr{C}_3$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; 0). La forme factorisée de la fonction h dont $\mathscr{C}_3$ est la représentation graphique est, $h(x) = ax(x-2)$.
De plus, la courbe passe par le point de coordonnées (4 ; 2), on a donc $h(4) = 2$.

Or $h(4) = 2 \Leftrightarrow 4a(4-2) = 2 \Leftrightarrow 8a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

La forme factorisée de la fonction h est $h(x) = \frac{1}{4}x(x-2)$.

La courbe $\mathscr{C}_4$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (–2 ; 0). La forme factorisée de la fonction i dont $\mathscr{C}_4$ est la représentation graphique est, $i(x) = a(x+2)^2$.
De plus, la courbe passe par le point de coordonnées (–1 ; –1), on a donc $i(-1) = -1$.
Or $i(-1) = -1 \Leftrightarrow a(-1+2)^2 = -1 \Leftrightarrow a = -1$.
La forme factorisée de la fonction i est $i(x) = -(x+2)^2$.

16 0 admet 4 et 5 pour antécédents signifie que la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (4 ; 0) et (5 ; 0).
La forme factorisée de la fonction f est, $f(x) = a(x-4)(x-5)$.
De plus, l'image de 1 par f est 24,
or $f(1) = 24 \Leftrightarrow a(1-4)(1-5) = 24 \Leftrightarrow 12a = 24 \Leftrightarrow a = 2$

La forme factorisée de la fonction f est $f(x) = 2(x-4)(x-5)$.

28 Posons L la longueur du champ rectangulaire et l sa largeur. Le champ est deux fois plus long que large signifie que $L = 2l$.
En ajoutant 5 m à sa longueur et 20 m à sa largeur on obtient une parcelle rectangulaire de 10000 m^2 se traduit par l'équation $(2l+5)(l+20) = 10000$.

$$(2l+5)(l+20) = 10000 \Leftrightarrow 2l^2 + 40l + 5l + 100 - 10000 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2l^2 + 45l - 9900 = 0.$$

Le polynôme du second degré $P(x) = 2x^2 + 45x - 9900$ a pour discriminant $\Delta = 45^2 - 4 \times 2 \times (-9900) = 81225$.
$\Delta > 0$, l'équation $2x^2 + 45x - 9900 = 0$, admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-45+\sqrt{81225}}{2\times 2} = 60$ et $x_2 = \dfrac{-45-\sqrt{81225}}{2\times 2} = -82{,}5$.
La largeur du champ est positive donc $l = 60$ m et $L = 120$ m.

30 Pour savoir si la trajectoire de l'épuisette et celle du poisson se croisent il faut résoudre l'équation $x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 4x - 4$.

$x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 4x - 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

$1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$. 1 est une solution évidente de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

$x_1 x_2 = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x_2 = 3$. Il est donc possible d'attraper deux fois la carpe. La première fois au point d'abscisse 1 et la deuxième fois au point d'abscisse 3.

44 **1.** $(x-1)(x^2-5x+6)=0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $x^2-5x+6=0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

$x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=1$

$\Delta>0$, donc le trinôme x^2-5x+6 admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5+\sqrt{1}}{2\times1}=3 \text{ et } x_2=\frac{5-\sqrt{1}}{2\times1}=2.$$

$\mathcal{S}=\{1;2;3\}$.

2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}=0$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

$\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}=0 \Leftrightarrow -x^2+5x-7=0$.

$\Delta=5^2-4\times(-1)\times(-7)=-3$

$\Delta<0$, donc le trinôme $-x^2+5x-7$ n'admet pas de racine réelle. $\mathcal{S}=\{\ \}$.

3. $x^3-x^2+4x=0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$x^3-x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-x+4=0$

$x^2-x+4=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times4=-15$

$\Delta<0$, donc le trinôme x^2-x+4 n'admet pas de racine réelle.

$\mathcal{S}=\{0\}$.

46 **(Reprise de certains résultats de l'exercice 44)**

1. $(x-1)(x^2-5x+6)>0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Le trinôme x^2-5x+6 a pour racines 2 et 3. Il a le signe de $a=1$ sauf entre les racines.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-5x+6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-5x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]1;2[\cup]3;+\infty[$.

2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}\leqslant 0$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

Le trinôme $-x^2+5x-7$ n'admet pas de racine réelle. Il est du signe de $a=-1$ pour tout réel x.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$	
$-x^2+5x-7$		$-$	|	$-$	
$\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}$		$+$	||	$-$	

$\mathcal{S}=\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

3. $x^3-x^2+4x\geqslant 0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$x^3-x^2+4x\geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2-x+4)\geqslant 0$

Le trinôme x^2-x+4 n'a pas de racine réelle, il est du signe de $a=1$, pour tout réel x. Le produit $x(x^2-x+4)$ a donc le signe de x. $\mathcal{S}=[0;+\infty[$.

61 **Une coquille s'est glissée dans l'énoncé : il faut lire $C(q) = 50\,q^2 + 1000\,q + 80\,000$; à la question 2, il faut lire 200 000 000 à la place de 200 000.**

1. $C(0) = 80\,000$. Les coûts fixes de l'entreprise sont de 80 000 000 €.

2. $C(q) > 200\,000 \Leftrightarrow 50q^2 + 1000q + 80\,000 > 200\,000$
$\Leftrightarrow 5q^2 + 100q - 12\,000 > 0.$

$\Delta = 100^2 - 4 \times 5 \times (-12\,000) = 250\,000.$

$\Delta > 0$, donc $5q^2 + 100q - 12\,000$ admet deux racines réelles :

$$q_1 = \frac{-100 + \sqrt{250000}}{2 \times 5} = 40 \text{ et } q_2 = \frac{-100 - \sqrt{250000}}{2 \times 5} = -60.$$

$a = 5$, donc $5q^2 + 100q - 120\,000 > 0$ sur $[40\,;100]$. À partir de 40 000 voitures fabriquées, le coût de production devient supérieur à 200 000 000 €.

3. $R(40) = 40 \times 6\,000 = 240\,000$. La recette est de 240 000 000 € pour 40 000 voitures commercialisées.

4. $R(q) = 6000q$

5. $B(q) = R(q) - C(q) = 6000q - \left(50q^2 + 1000q + 80\,000\right)$
$= -50q^2 + 5000q - 80\,000$

6. On cherche les valeurs de q pour lesquelles le bénéfice est positif.
$-50q^2 + 5000q - 80\,000$ a pour discriminant :
$\Delta = 5\,000^2 - 4 \times (-50) \times (-80\,000) = 9\,000\,000.$ $\Delta > 0$, donc $-50a^2 + 5000a - 80\,000$ admet deux racines réelles :

$$q_1 = \frac{-5000 + \sqrt{9000000}}{2 \times (-50)} = \frac{-2000}{-100} = 20$$

$$\text{et } q_2 = \frac{-5000 + \sqrt{9000000}}{2 \times (-50)} = \frac{-8000}{-100} = 80.$$

Pour réaliser un bénéfice, la quantité de voitures (en millier) doit se situer dans l'intervalle [20 ; 80], soit entre 20 000 et 80 000 voitures vendues.

7. $a = -50 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas. Le bénéfice aura donc une valeur maximale atteinte en $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-5000}{-100} = 50$.

On trouve donc que le bénéfice maximal en milliers d'euros est $B(50) = 45\,000$.

Le bénéfice maximal est donc de 45 000 000 € pour 50 000 voitures vendues.

62 **1.** $t_0 = \dfrac{-8}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8$. Le javelot atteint le sommet de sa trajectoire au bout de 8 secondes.

2. $-\dfrac{1}{2}t^2 + 8t + 2 = 32 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}t^2 + 8t - 30 = 0$.

$\Delta = 8^2 - 4\times(-0{,}5)\times(-30) = 4$. $\Delta > 0$, donc $-\dfrac{1}{2}t^2 + 8t - 30$ admet deux racines réelles :

$t_1 = \dfrac{-8+\sqrt{4}}{2\times(-0{,}5)} = 6$ et $t_2 = \dfrac{-8-\sqrt{4}}{2\times(-0{,}5)} = 10$.

Le javelot atteindra une hauteur de 32 m au bout de 6 s (phase ascendante du javelot) puis au bout de 10 s (phase descendante).

3. Le javelot atteint le sommet de sa trajectoire au bout de 8 secondes, or, $h(8) = -\dfrac{1}{2}\times 8^2 + 8\times 8 + 2 = 34$.

Le javelot n'atteindra donc jamais la hauteur de 35 m.

4. $-\dfrac{1}{2}t^2 + 8t + 2 = 0$. $\Delta = 8^2 - 4\times(-0{,}5)\times 2 = 68$.

$\Delta > 0$, donc $-\dfrac{1}{2}t^2 + 8t + 2$ admet deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-8+\sqrt{68}}{2\times(-0{,}5)} \text{ et } t_2 = \frac{-8-\sqrt{68}}{2\times(-0{,}5)} = 8 + 2\sqrt{17}.$$

t est une grandeur positive, seul t_2 convient. Le javelot touchera le sol environ 16 secondes après avoir été lancé par l'athlète.

102 Soit $(x\,;y)$ les coordonnées du point M.

$AM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Le point M appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée.

On a donc, $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \sqrt{x}^2} = \sqrt{(x-1)^2 + x}$

$= \sqrt{x^2 - x + 1}$.

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, minimiser la longueur AM revient à minimiser AM^2.

$AM^2 = x^2 - x + 1$, le coefficient de x^2 est positif donc AM^2 admet un minimum en $x = \dfrac{1}{2}$. La distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$.

103 **1.** Soit $x = AP$ avec $x \in [0\,;8]$.
L'aire de la surface bleue est constituée de l'aire d'un carré de côté x et de l'aire d'un triangle de hauteur $8 - x$ et de base $DC = 8$.

$$A(x) = x^2 + \frac{(8-x)\times 8}{2} = x^2 - 4x + 32.$$

Le coefficient de x^2 est positif donc l'aire de la surface bleue est minimale pour $x = 2$. Pour que l'aire bleue soit minimale le point P doit être sur le segment $[AB]$, à 2 unités de longueur du point A.

2. $x^2 - 4x + 32 = 0{,}75 \times 64 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 16 = 0$. $\Delta = 80 > 0$,
donc l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{4+\sqrt{80}}{2} \approx 6{,}47$
et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{80}}{2} < 0$.
Pour que l'aire bleue soit égale à 75 % de l'aire du carré, le point P doit être sur le segment $[AB]$, à environ 6,47 unités de longueur du point A.

3. L'aire minimale de la surface bleue est $A(2) = 28$ et $0{,}25 \times 64 = 16$ il n'est donc pas possible que l'aire de la surface bleue atteigne un quart de l'aire du carré.

107 On pose $DM = x$, avec $x \in [0\,;5]$.
Dans le triangle ADM rectangle en D on a, $MA^2 = x^2 + 4$.
De même dans le triangle MCD rectangle en C on a, $MB^2 = (5-x)^2 + 4$.
Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si $MA^2 + MB^2 = 5^2$.

$$MA^2 + MB^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

$\Delta = 9 > 0$, donc l'équation admet pour solutions 4 et 1. Pour que le triangle AMB soit rectangle il faut que le point M soit situé sur le segment $[DC]$ à 1 ou 4 unités de longueur du point D.